SUCESIONES NUMÉRICAS

Una <u>Sucesión numérica</u> es una relación entre los números naturales y los números reales, de manera que, para cualquiera de aquellos obtenemos un número real.
Los números que forman la sucesión se llaman <u>términos</u> (a_1, a_2, a_3, ...). El término general (a_n) es aquel que representa a todos los términos de la sucesión.

ej:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
1 & \longrightarrow & 2 \\
2 & \longrightarrow & 4 \\
3 & \longrightarrow & 6 \\
4 & \longrightarrow & 8 \\
\vdots & & \vdots \\
10 & \longrightarrow & 20 \\
\vdots & & \vdots \\
n & \longrightarrow & 2n
\end{array}
$$

En este ejemplo, los términos de la sucesión son: 2, 4, 6, 8, ...
El primero $a_1=2$, el segundo $a_2=4$, el décimo $a_{10}=20$, así succesivamente.
Al término general $a_n=2n$, dándole valores enteros a n, obtenemos los diversos términos de la sucesión.

1. Calcula el criterio mediante el cual se han formado cada una de las sucesiones numéricas siguientes, añadiendo tres términos más.

a) 1, 2, 3, 4, 5, ... **b)** 2, 4, 6, 8, 10, ... **c)** 3, 6, 9, 12, 15, ...
d) 1, 4, 9, 16, 25, ... **e)** 1, 8, 27, 64, 125, ... **f)** 1, 3, 5, 7, 9, ...
g) 4, 7, 10, 13, 16, ... **h)** –2, 1, 6, 13, 22, ... **i)** 2, 4, 8, 16, 32, ...
j) -1/2, -2/3, -3/4, -4/5, ... **k)** 1/3, 4/6, 9/9, 16/12, ... **l)** 0’1, 0’01, 0’001, ...
m) -1, 2, -3, 4, -5, ... **n)** 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

2. A partir de los términos generales de las siguientes sucesiones numéricas, calcula sus tres primeros términos a_1, a_2, a_3, y el que ocupa el décimo lugar, a_{10}.

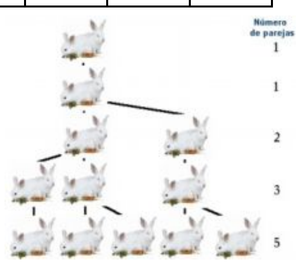
a) $a_n=(5-3n)$ **b)** $a_n=(n^2-4)$ **c)** $a_n=(-1)^n.n^3$
d) $a_n=(2n-1):n$ **e)** $a_n=2^n+1$ **f)** $a_n=(n^2-2):(2n^2-1)$
g) $a_n=\begin{cases} 5 & si\ n\ es\ par \\ -n^3 & si\ n\ es\ impar \end{cases}$ **h)** $a_1=3$, $a_2=5$, $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$

3. Dejamos caer una pelota desde una altura de 2 m y después de cada rebote, la altura se reduce a la mitad de la anterior. Escribe la sucesión de las alturas alcanzadas, su término general, razona si crece o decrece y su tendencia (límite).

4. Alguien puso una pareja de conejos, acabados de nacer, en un corral. Cada pareja recién nacida necesita un mes para hacerse adulta, durante el cual no se reproduce. Cada pareja origina mensualmente una nueva pareja, según la siguiente tabla:

Al comenzar el mes	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Número de parejas	*1*	*1*	*2*	*3*	*5*	*8*						

a) Completa la tabla y obtén el término general
b) ¿Cuántas parejas habrá después de un año y medio de comenzar la experiencia?



PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

Una <u>Progresión Aritmética</u> es una sucesión donde cada término se calcula sumándole al anterior una cantidad constante, llamada diferencia (d).

- ej: 5, 8, 11, 14, ... es una progresión aritmética de diferencia d=3, pues 8-5=11-8=14-11=3

Como cada término se calcula sumándole la diferencia al anterior →

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots \quad a_{10} \quad \dots \quad a_n$

+d
+2d
+3d
+9d
+(n−1)·d

$a_2=a_1+d$, $a_3=a_1+2d$, $a_4=a_1+3d$, ... → $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$ que <u>relaciona a_n con el primero</u>.

5. Entre las siguientes sucesiones numéricas:

- Identifica las que son progresiones aritméticas.
- Escribe su término general.
- Obtén los términos que ocupan las posiciones 10ª y 21ª

a) 10, 7, 4, 1,... **b)** 1, 2, 4, 7, ... **c)** 2’7, 2’9, 3’1, ... **d)** 2/3, 1, 4/3, 5/3, ...
e) 2, 4, 8, 16,... **f)** 90, 78, 66, ... **g)** 5, 10, 15, 20,...

<u>Propiedad</u>: “En cualquier p.a., la suma de términos que equidistan de los extremos es constante”

- ej: 5, 8, 11, 14, 17, 20 → si sumamos primero y último término = a1+a6=5+20=25
  a_2+a_5= 8+17=25
  a_3+a_4= 11+14=25 ...

Suma de los n primeros términos de una p.a.

Llamamos a la suma $S_n= a_1 + a_2 + \dots\dots a_{n-1} + a_n$
por la propiedad conmutativa de la suma $S_n= a_n + a_{n-1} + \dots\dots a_2 + a_1$
si sumamos ambas expresiones → $2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\dots\dots(a_{n-1}+a_1)+(a_n+a_1)$
como todos los paréntesis son iguales, por la propiedad anterior, y hay n paréntesis →

→ $2S_n=(a_1+a_n)\cdot n$ → $S_n=\frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n$

ex: obtener la suma de los 20 términos de la p.a. 5, 8, 11, 14, 17, 20, ... →
ya sabíamos que la diferència d=3, falta calcular $a_{20}=a_1+19\cdot d=5+19\cdot 3=62$

Por tanto la suma $S_{20}=\frac{(a_1+a_{20})}{2}\cdot 20 \quad \frac{(5+62)}{2}\cdot 20 \quad 640$

6. Calcula el término general de una p.a. sabiendo que $a_7=6$ y $a_{15}=10$, obtén el término que ocupa el lugar 51º y la suma de los 51 primeros términos.

7. Construye una progresión aritmética donde el primer término sea 26 y el noveno 58. ¿Cuánto suman los 30 primeros términos?

8. En una sala de cine, la primera fila de butacas dista de la pantalla 8’60 m y la sexta 13’4 m. ¿En qué fila estará alguien si su distancia a la pantalla es de 23 metros?

9. En una plantación hay 51 filas de árboles. Cada fila tiene dos árboles más que la anterior. La fila 26º tiene 57 árboles y se desea saber cuántos árboles hay en la primera fila, en la última y el número total de árboles.

Una <u>Progresión Geométrica</u> es una sucesión donde cada término se calcula multiplicándo el anterior por una cantidad constante, llamada razón (r).

- ej: 3, 6, 12, 24, ... es una progresión geométrica de razón r=2, pues 6:3=12:6=24:12=2

Como cada término se calcula multiplicándole la razón al anterior →

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \ldots \quad a_{10} \quad \ldots \quad a_n$

$a_1 \xrightarrow{\cdot r} a_2$

$a_1 \xrightarrow{\cdot r^2} a_3$

$a_1 \xrightarrow{\cdot r^3} a_4$

$a_1 \xrightarrow{\cdot r^9} a_{10}$

$a_1 \xrightarrow{\cdot r^{(n-1)}} a_n$

$a_2=a_1\cdot r$, $a_3=a_1\cdot r^2$, $a_4=a_1\cdot r^3$, ... → $a_n=a_1\cdot r^{(n-1)}$ que <u>relaciona cualquier término con el primero</u>.

Si la razón r>1 → la progresión geométrica es creciente
Si la razón r<1 → la progresión geométrica es decreciente

10. Entre las siguientes sucesiones numéricas:

- Identifica las que son progresiones geométricas.
- Escribe su término general.
- Obtén el valor de los términos que ocupan las posiciones 10ª y 21ª.

a) 3, 6, 12, 24,... **b)** 80, 40, 20, 10,... **c)** 10, 7, 4, 1,... **d)** 40, 4, 0’4, 0’04,...
e) 1, 2, 4, 7,... **f)** 25, 30, 36, 43’2,... **g)** 10, 2, 0’4, 0’08,...

Para calcular la <u>Suma de n términos</u> de una p.g. utilizaremos la relación $S_n = \frac{a_1\cdot\left(r^n-1\right)}{r-1}$

- ej: en la sucesión anterior, 3, 6, 12, 24, ... obtener la suma de los 10 primeros términos.

Ya sabíamos que era geométrica de razón r=2, → $S_{10} = \frac{a_1\cdot\left(r^{10}-1\right)}{r-1} = \frac{3\cdot\left(2^{10}-1\right)}{2-1} = 3069$

11. En una p.g. a_2=200 y a_4=8. Obtén el término general, el octavo término y la suma de los ocho primeros términos.

12. En una p.g. a_{25}=40 y la razón es 1/2. Calcula el primer término, el vigésimo, la suma de los veinte primeros y de los infinitos términos de esta progresión.

13. ¿Qué grosor adquirirá una hoja de papel de 0’13 mm de espesor si pudiéramos plegarla 50 veces?

14. Si en un tablero de ajedrez (64 casillas) colocamos un grano de trigo en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera, y así sucesivamente, ¿cuántos granos de trigo tendríamos en total?

15. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar el primer año 480 €/mes, y cada año se aumentará el alquiler en 40 €/mes. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 10 años? ¿Cuánto se habrá pagado en total durante esos 10 años?

16. Un esquiador comienza la pretemporada de esquí haciendo pesas en un gimnasio durante una hora. Decide incrementar el entrenamiento 10 minutos cada día. ¿Cuánto tiempo entrenará el 15º día? ¿Cuánto tiempo habrá entrenado en un mes de 30 días?

Para calcular la suma de los infinitos términos de una p.g. decreciente (r<1) → $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

• ej: en la sucesión 40, 20, 10, 5, ... obtener la suma de sus infinitos términos.

es una p.g. de razón r=1/2=0'5 → $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{40}{1-0'5} = \frac{40}{0'5} = 80$

17. El pago de un coche de segunda mano se decide hacer de la siguiente manera: el primer mes 400 €, el segundo 300 €, y cada mes 3/4 partes de lo que se ha pagado el mes anterior. ¿Qué cantidad total se habrá pagado durante el primer año? ¿Cuál será la suma de todas las mensualidades, si no se detuviera nunca el pago?

18. En cierto parque natural se alquilan bicicletas de la siguiente forma: “La primera hora 1’20 €; y cada una de las siguientes dos tercios de lo que cuesta la hora anterior”. Si se ha alquilado una a las diez y se devuelve a las cinco de la tarde, ¿cuánto se ha de pagar?

19. Un coronel manda 5.050 soldados y quiere formar con ellos un triángulo para una exhibición, de forma que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas hacen falta?

20. En clase de Educación Física, los alumnos forman una “torre humana” de cinco pisos, el primero está formado por 25 alumnos, el segundo por 19, y cada piso superior lo forman 6 alumnos menos que el anterior. ¿Cuántos alumnos forman la torre?

21. Cierta clase de algas se reproduce doblando su número en dos horas y media. Después de otras dos horas y media vuelve a doblar su número, y así sucesivamente. Si la cantidad inicial de alga era de un kilo, ¿cuántos habrá dentro de 20 horas? ¿Y dentro de 100 horas?

22. Alberto y María están leyendo una novela de 400 páginas. Alberto lee 45 páginas diarias, mientras que María lee 15 páginas el primer día, 25 el segundo, 35 el tercero, y así sucesivamente. ¿Después de cuánto tiempo se encontrarán en la misma página? ¿Quién acabará antes la novela?

23. A las 8 de la mañana llegó a una ciudad de 100.000 habitantes un vecino de la capital llevando una noticia. En la estación, el viajero comunicó la noticia a 3 persones que no la conocían, eso sucedió en 20 minutos. Conocida la noticia, cada uno de estos tres vecinos la comunicó a otros tres, también en 20 minutos. Si se continúa este proceso, ¿cuánto tiempo tardarían en enterarse todos los vecinos de la ciudad?

24. La población de un país africano era en 1.990 de diez millones de habitantes y su ritmo de crecimiento era del 7% anual. Calcula la población que hubo en 1.995, y en 2.050.

Las posibilidades económicas de este país hacen que sólo puedan vivir en condiciones 50 millones de habitantes, ¿en qué año se alcanzaría esta población?

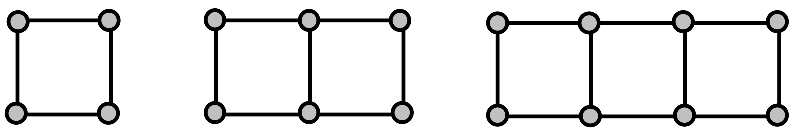
25. En una prueba de mecanografía se exigen 250 pulsaciones por minuto. Juan, que únicamente llega a 60 ppm, decide ir a una academia que le garantiza que cada semana aumentará 8 ppm.

a) ¿Cuántas pulsaciones habrá alcanzado después de 15 semanas?
b) ¿Cuánto tiempo habrá de pasar para que llegue a las 250 ppm?

26. Un inversor coloca 4.000 € al 8% anual, ¿cuánto dinero podrá retirar al cuarto año de hacer la inversión?

27. Observa cómo se construye esta estructura y cuenta cuántos palos y cuántas bolas tiene:

- ¿Cuántos palos y cuántas bolas hacen falta para hacer una fila de 10 cuadrados?
- ¿Y para hacer una fila de n cuadrados?



EJERCICIOS DE REPASO

1. He comprado una bicicleta a plazos. El primer mes he pagado 15,60 €, el segundo mes 18,60 €, el tercero 21,60 € , y así sucesivamente, y el último mes pagué 42,60 €.
   a) ¿Cuántos meses he tenido que pagar?
   b) ¿Cuánto me ha costado la bicicleta?

2. Una máquina costó inicialmente 5240 €. Al cabo de unos años se vendió a la mitad de su precio. Pasados unos años volvió a venderse por la mitad, y así sucesivamente.
   a) Forma la sucesión de precios de la máquina y escribe el término general.
   b) ¿Cuánto le costó al quinto propietario?
   c) ¿Cuál es la suma total pagada por esa máquina, suponiendo que no dejara de venderse indefinidamente?

3. Hemos comprado una lavadora a plazos. El primer mes hemos pagado 24,40€, el segundo mes 28,60€, el tercero 32,80€, y así sucesivamente. El último mes pagamos 62,20€.
   a) ¿Cuántos meses hemos tenido que pagar?
   b) ¿Cuánto nos ha costado la lavadora?

4. Un tratante de ganado te vende un caballo pura sangre a condición de que le pagues 10 céntimos por el primer clavo de la herradura, 20 céntimos por el segundo, 40 por el tercero, 80 por el cuarto, hasta llegar al clavo número 20, que es el último. ¿Cuánto vale el caballo?

5. Una tienda de productos informáticos ofrece la siguiente forma de pagar un ordenador a plazos: el primer mes 25,80 €, el segundo 29,40 €, el tercer mes 33 €, y así sucesivamente hasta las 94,20 € del último mes. Sin calcular los pagos intermedios, halla:
   a) Cuántos meses se tarda en pagar dicho ordenador.
   b) Cuál es el precio total del ordenador.

6. Las amplitudes de las sucesivas oscilaciones de un péndulo forman una progresión geométrica: 16, 12, 9, ... cm. Halla la distancia total recorrida por la esferilla del péndulo hasta alcanzar el reposo.

7. Ana y Javier deciden comprarse un piso que irán pagando mediante 100 plazos que forman una progresión aritmética. Sabiendo que el plazo 26º es de 600 € y el plazo 38º es de 816 €, obtén:
   a) Cuál es la diferencia de la progresión y lo que pagarán inicialmente.
   b) Cuánto pagarán en el último plazo y lo que les costó el piso.

8. Una máquina excavadora de pozos, profundiza cada día las dos terceras partes de lo excavado el día anterior. Si funcionara indefinidamente sería capaz de excavar un total de 24 metros.
   a) ¿Cuántos metros es capaz de excavar el primer día?
   b) ¿Cuánto excavaría el 15º día?

9. Los 2.080 alumnos de un colegio se disponen en el patio a formar una gran figura triangular, de manera que el número de alumnos que hay en cada fila forman una progresión aritmética. Sabiendo que en la primera fila hay 3 alumnos y que se han necesitado 32 filas, averigua:
   a) ¿Cuántos alumnos hay en la última fila? ¿Cuál es la diferencia de la progresión?
   b) ¿Cuántos alumnos hay en la fila 10? ¿Cuántos hay entre las 10 primeras filas?

10. La audiencia de un programa semanal de T.V. es cada semana las tres quintas partes que la de la anterior. Si el programa se hubiera emitido indefinidamente habría sido visto en total por 500.000 personas.
    a) ¿Cuántas personas vieron el programa la primera semana de emisión?
    b) ¿Cuántas personas vieron en total el programa durante las 6 primeras semanas?

11. En unas excavaciones arqueológicas se encuentran un total de 1.064 piedrecitas agrupadas de la siguiente manera: en un primer montón 2 piedras, en un segundo montón 8 piedras, en un tercer montón 14 piedras, y así sucesivamente. Sin hallar las piedras que había en cada montón, calcula:
    a) ¿Cuántos montones de piedrecitas se encontraron? b) ¿Cuántas piedras había en el último de ellos?

12. A la proyección de una película de cine acude cada semana el 50% del número de espectadores de la semana anterior. Si a lo largo de la octava semana ven la película 800 personas:
    a) ¿Cuántas personas vieron la película la primera semana de proyección?
    b) ¿Cuántas en total vieron la película en las ocho semanas?
    c) Si se proyectara indefinidamente, ¿cuántos serían en total los espectadores que la habrían visto?

13. Un nadador comienza una serie de entrenamientos nadando el primer día 600 metros, el segundo día 650 metros, 700 metros el tercero, y así sucesivamente.
    a) ¿Cuántos metros nadará el 30º día de entrenamiento?
    b) ¿Cuántos metros habrá nadado en total al finalizar esos 30 primeros días?

14. Una entidad bancaria nos hace un préstamo en las siguientes condiciones: cada año que pasa le habremos de pagar el 20% de lo pagado el año anterior, de manera que si no dejáramos de pagar nunca, recaudaría 12.500 €
    a) ¿Cuánto habremos de pagar el primer año?. ¿Y el quinto año?
    b) ¿Cuánto se habrá devuelto al cabo de cinco años?

15. Un club de fútbol se fundó con 620 socios. Al cumplir ahora sus bodas de plata tiene 3020 socios. Si cada año ha obtenido el mismo número de altas y ninguna baja,
    a) ¿Cuántas altas hubo cada año?
    b) ¿Cuántos socios tenía hace 10 años?

16. El número de bacterias en un cultivo apropiado se duplica cada mes. Si al comienzo del experimento hay 1.000 bacterias:
    a) ¿Cuántas habrá dentro de dos años?
    b) ¿Cuánto tiempo habrá de transcurrir para obtener 8.112.000 bacterias?

17. Queremos hacer un pozo para buscar agua con el siguiente presupuesto: 1^{r} metro 350 €, 2º metro 400 €, 3^{r} metro 450 €, y así sucesivamente. Hemos excavado 17 metros y no aparece agua, ¿cuánto nos cuesta el 18º metro?, ¿cuánto nos cuesta hacer un pozo de 18 metros?

18. En 1990, en el Océano Pacífico, vivían 65.000 ballenas, pero su número va disminuyendo de forma preocupante, de manera que cada año hay dos ballenas menos por cada cinco del año anterior.
    a) ¿Cuántas ballenas viven actualmente en el Océano Pacífico?

b) ¿En qué año vivirán menos de 100 ejemplares de estos cetáceos?
c) Si cada año, por cada ballena viva se consiguiera una ayuda de 8 euros, ¿cuántos euros se podrían recoger hasta la desaparición de este sorprendente mamífero?

19. Un buen estudiante de matemáticas decide presentarse a una Olimpiada Matemática. Para ello, debe incrementar paulatinamente el número de problemas a resolver cada semana, de manera que el número de problemas resueltos por semana es una progresión aritmética. Si la quinta semana resuelve 27 problemas, y la trigésima semana resuelve 102, obtener:
a) El número de problemas que incrementa cada semana.
b) El número de problemas que resolvió la primera semana.
c) La cantidad total de problemas que lleva resueltos después de 41 semanas.

20. Un flamenco emigra desde las costas de Marruecos hacia las salinas de Santa Pola. La distancia recorrida cada día de su aventurado viaje disminuye debido al cansancio. Así, el primer día recorre 300 km el segundo día vuela 225 km, y cada día vuela las ¾ partes de los recorrido el día anterior. Obtener:
a) La distancia recorrida durante el décimo día de viaje.
b) La distancia total recorrida al cabo de diez días.
c) ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en total al final de su viaje?
d) ¿Qué ocurriría si la distancia entre el punto de las costas de Marruecos desde el que salió y las salinas de Santa Pola fuera de 1500 km?

21. Este sábado, en el Museo del Prado, los visitantes fueron llegando de manera bastante peculiar: los dos primeros llegaron a las 9:00h, a las 9:05h llegaron 5, a las 9:10h, 8 personas, a las 9:15, 11 más, y así sucesivamente.
a) ¿Cuántos visitantes llegan a las 11:00h?
b) Suponiendo que nadie haya abandonado el museo a las 11:00h, ¿cuántos visitantes hay en el interior del museo a dicha hora?
c) En un determinado momento, hay un total de 2072 personas en el museo, y todavía no ha salido ninguna desde su apertura. ¿Qué hora es?

22. Un mendigo pide hospitalidad a un avaro, el cual le propone cobrarle 1 € por la primera noche, 2 € por la segunda, 3 por la tercera noche, y así hasta el final de los 30 días que pensaba quedarse hospedado. El mendigo acepta, pero le pide al avaro que le dé a cambio 0.001 € el primer día, 0.002 el segundo, 0.004 el tercero. así hasta el último día. Al final del mes sacan cuentas. ¿Quién y cuánto salió ganando?

23. En el Noroeste de la India, en la época de lluvias (Monzón), se recoge alrededor de 225 litros por metro cuadrado. Las lluvias van remitiendo poco a poco a medida que pasan los días, de forma que cada día se recoge un 3% menos de lluvia que el día anterior.
a) ¿Cuántos litros por metro cuadrado se recogerán el decimoquinto día de monzón?
b) ¿Y cuántos se habrán recogido a lo largo de estos quince días?
c) ¿Cuántos días tendrán que pasar para que en un día se recojan 45 l/m^2?
d) Cuando terminen las lluvias, ¿qué cantidad de agua por m^2 se habrá recogido a lo largo de todo el monzón?